



ce
pre
UNI

Álgebra

TEMA NÚMEROS COMPLEJOS PARTE II

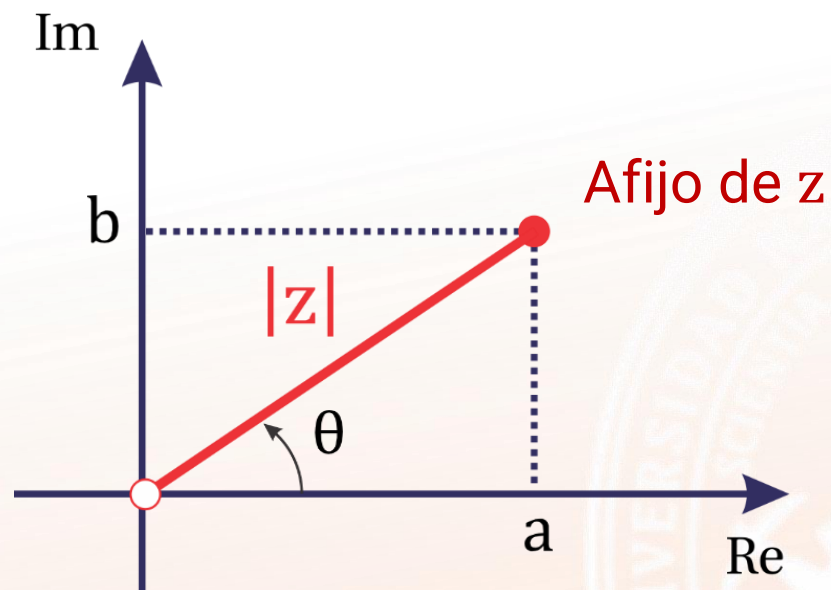
CICLO
PREUNIVERSITARIO
2024-1



Semana
11.2

FORMA TRIGONOMÉTRICA DE UN COMPLEJO

Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}^*$



$$a = |z| \cos(\theta)$$

$$b = |z| \operatorname{sen}(\theta)$$

$$\Rightarrow z = |z|(\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta) i)$$

Forma polar o trigonométrica de z

Teorema de Euler $\forall x \in \mathbb{R}, e^{xi} = \cos(x) + \text{sen}(x) i$

En particular

$$e^{\pi i} = \cos(\pi) + \text{sen}(\pi) i = -1, \quad e^{\pi i} = -1$$

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) i = i, \quad e^{\frac{\pi}{2}i} = i$$

$$e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + \text{sen}(2\pi) i = 1, \quad e^{2\pi i} = 1$$

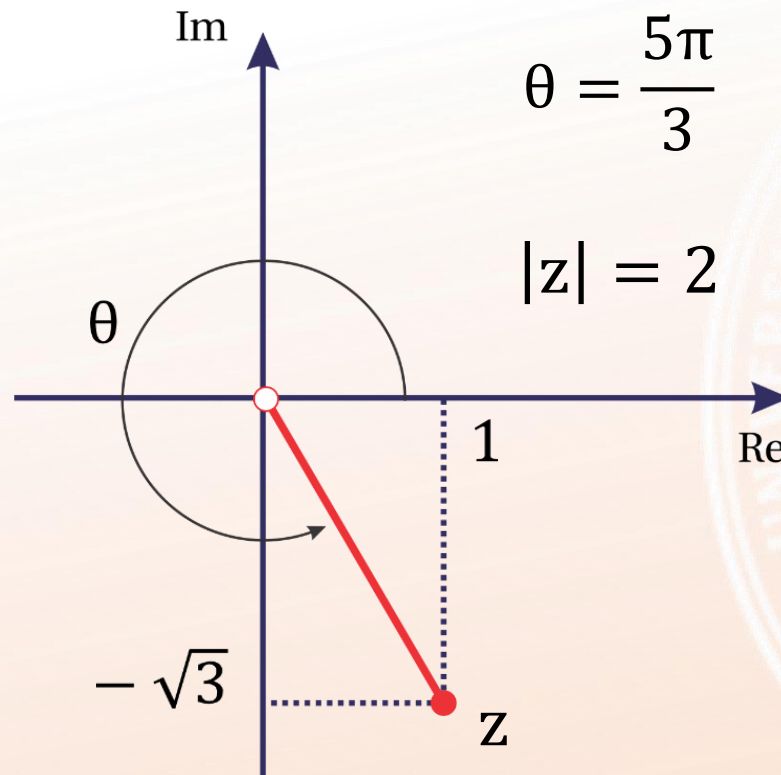
FORMA EXPONENCIAL DE UN COMPLEJO

$$\text{Si } x = \theta \text{ rad, } e^{\theta i} = \cos(\theta) + \text{sen}(\theta) i \Rightarrow z = |z| e^{\theta i}$$

FORMA TRIGONOMÉTRICA Y EXPONENCIAL DE UN COMPLEJO

Ejemplo

Sea $z = 1 - \sqrt{3}i$



$$z = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} i \right)$$

Forma trigonométrica de z

$$z = 2 e^{\frac{5\pi}{3} i}$$

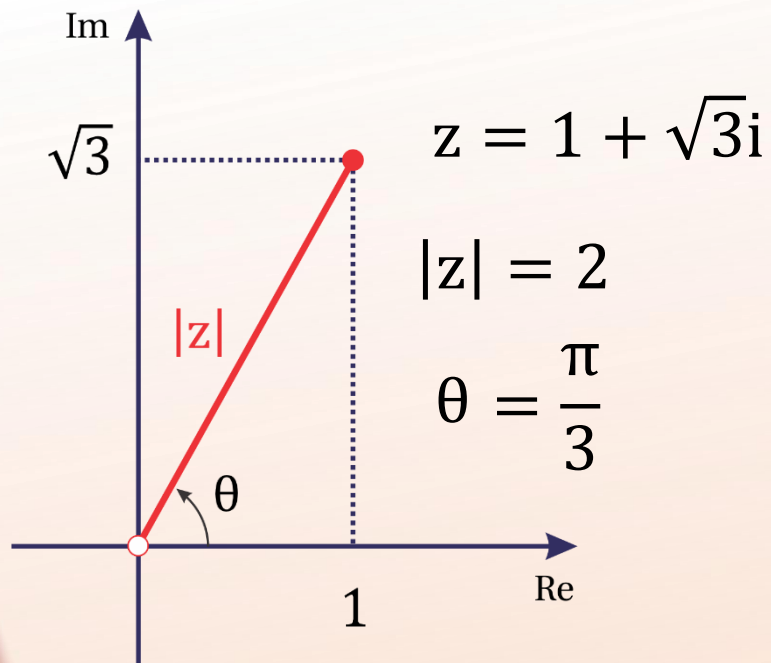
Forma exponencial de z

FÓRMULA DE MOIVRÉ

Sean $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$, $(\cos(x) + \operatorname{sen}(x) i)^n = \cos(nx) + \operatorname{sen}(nx) i$

Ejemplo

Calcule $F = (1 + \sqrt{3}i)^{30}$



$$F = \left[2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} \right) i \right) \right]^{30}$$

$$= 2^{30} \left[\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} \right) i \right]^{30}$$

$$= 2^{30} \left[\cos \left(\frac{30\pi}{3} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{30\pi}{3} \right) i \right]$$

$$= 2^{30} [\cos(10\pi) + \operatorname{sen}(10\pi) i] = 2^{30}$$

POLINOMIO COMPLEJO

Un polinomio $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, es conocido como “polinomio complejo”.

Ejemplo

Determine el polinomio mónico de menor grado que tenga como raíces a: i , $1 + i$ y π .

- $p(x) = (x - i)(x - 1 - i)(x - \pi)$ en $\mathbb{C}[x]$.
- $p(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 2x + 2)(x - \pi)$ en $\mathbb{R}[x]$

Ejercicio

Halle el (o los) valores de w tal que $w^5 = 1 + \sqrt{3}i$.

$$\bullet \quad w = \sqrt[5]{1 + \sqrt{3}i} \quad \bullet \quad w^5 + 0w^4 + 0w^3 + 0w^2 + 0w - (1 + \sqrt{3}i) = 0$$

w la raíz quinta de $1 + \sqrt{3}i$

Existen 5 valores de w

Sea $w = |w| \operatorname{cis}(\theta)$, $\theta = \operatorname{Arg}(w)$

$$\text{Si } w^5 = 1 + \sqrt{3}i, \quad |w^5| = |1 + \sqrt{3}i|, \quad |w|^5 = 2 \Rightarrow |w| = \sqrt[5]{2}$$

$$\text{Además } \operatorname{Arg}(w^5) = \operatorname{Arg}(1 + \sqrt{3}i)$$

$$5 \operatorname{Arg}(w) - 2\pi k = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \operatorname{Arg}(w) = \frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{5} \in [0; 2\pi)$$

para algún $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Por lo tanto, } w = \sqrt[5]{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{5}\right) \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

RAÍZ N-ÉSIMA DE UN NÚMERO COMPLEJO

Sea $z \neq 0, n \geq 2 (n \in \mathbb{N})$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \operatorname{cis} \left(\frac{\operatorname{Arg}(z) + 2\pi k}{n} \right)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

Ejemplo

$$\sqrt{-1} = \sqrt{|-1|} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi + 2\pi k}{2} \right) = \operatorname{cis} \left((2k + 1) \frac{\pi}{2} \right) \quad k = 0, 1$$

$$k = 0, \quad z_0 = \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) i = i$$

$$z_0 + z_1 = 0$$

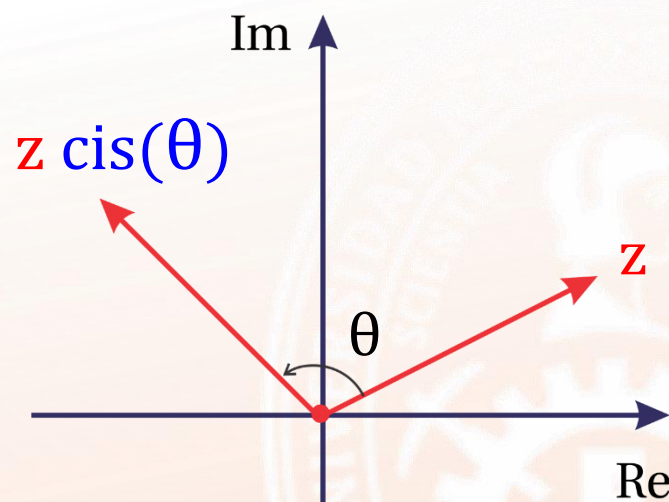
$$z_0^2 = z_1^2 = -1$$

$$k = 1, \quad z_1 = \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{3\pi}{2} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{3\pi}{2} \right) i = -i$$

Por lo tanto, z_0 y z_1 son raíces cuadradas de -1

Observación

Si $z \in \mathbb{C}^*$, geométricamente z define un vector en posición normal y además $z \operatorname{cis}(\theta)$ ($0 < \theta < 2\pi$) se genera de z mediante la rotación de θ rad en sentido antihorario respecto del origen de coordenadas.



Ejemplo

Si $z = \sqrt{5} + i$, geométricamente para rotar z en sentido antihorario 90° es necesario multiplicar a z por $\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$

Ejemplo

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{|1|} \operatorname{cis} \left(\frac{0 + 2\pi k}{3} \right) = \operatorname{cis} \left(\frac{2\pi k}{3} \right) \quad k = 0, 1, 2$$

$$z_0 + z_1 + z_2 = 0$$

$$k = 0, \quad z_0 = \operatorname{cis}(0) = \cos(0) + \operatorname{sen}(0)i = 1$$

$$z_0^3 = z_1^3 = z_2^3 = 1$$

$$k = 1, \quad z_1 = \operatorname{cis} \left(\frac{2\pi}{3} \right) = \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{3} \right) i = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 2, \quad z_2 = \operatorname{cis} \left(\frac{4\pi}{3} \right) = \cos \left(\frac{4\pi}{3} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{4\pi}{3} \right) i = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Por lo tanto, z_0, z_1 y z_2 son raíces cúbicas de 1

En el ejemplo anterior

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1} &= \sqrt[3]{|1|} \operatorname{cis}\left(\frac{0 + 2\pi k}{3}\right) = \operatorname{cis}\left(0 + \frac{2\pi k}{3}\right) \\ &= \operatorname{cis}(0) \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi k}{3}\right) = \operatorname{cis}(0) \left[\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]^k\end{aligned}$$

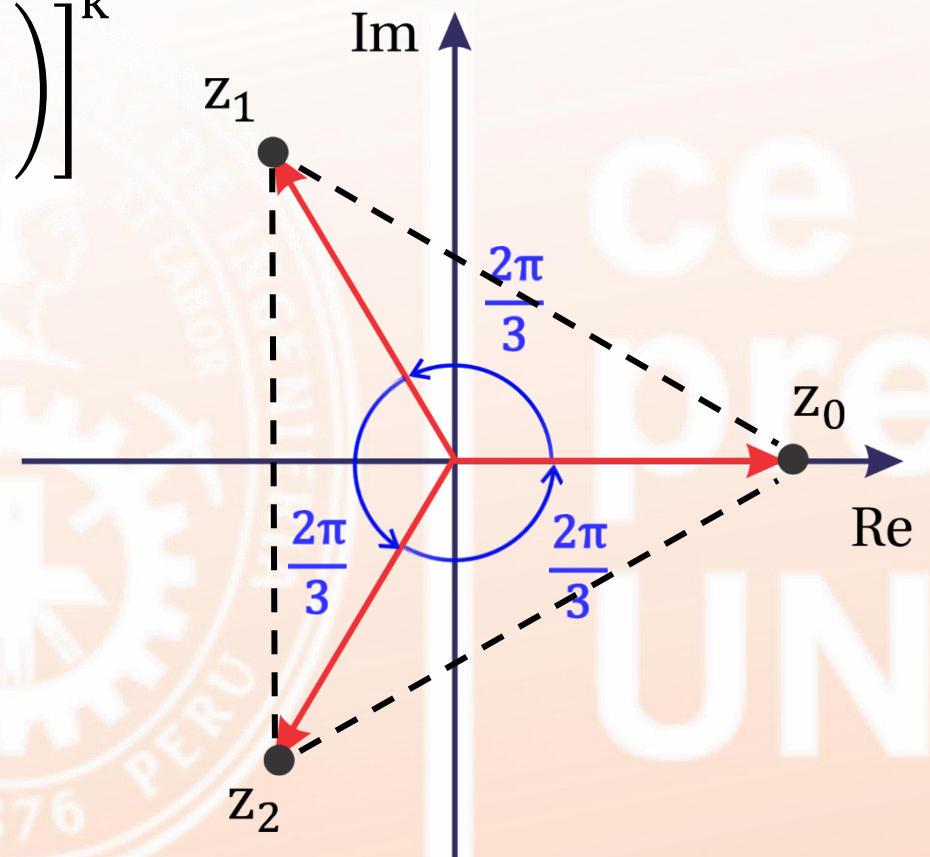
Si $z_0 = \operatorname{cis}(0) = 1$ (raíz principal de z)

$$z_1 = z_0 \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$z_2 = z_0 \left[\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]^2$$

$$\operatorname{cis}(\alpha + \beta) = \operatorname{cis}(\alpha) \operatorname{cis}(\beta)$$

$$\operatorname{cis}(\alpha n) = [\operatorname{cis}(\alpha)]^n$$



RAÍZ N-ÉSIMA PRINCIPAL

Sea $z \neq 0, n \geq 2 (n \in \mathbb{N})$
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \operatorname{cis} \left(\frac{\operatorname{Arg}(z) + 2\pi k}{n} \right)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

De entre todas las raíces n -ésimas de z , consideremos

$$z_0 = \sqrt[n]{|z|} \operatorname{cis} \left(\frac{\operatorname{Arg}(z)}{n} \right)$$

(raíz n -ésima principal de z)

RAÍZ N-ÉSIMA DE UN NÚMERO COMPLEJO

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \operatorname{cis} \left(\frac{\operatorname{Arg}(z)}{n} \right) \operatorname{cis} \left(\frac{2\pi k}{n} \right) = z_0 \left[\operatorname{cis} \left(\frac{2\pi}{n} \right) \right]^k \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

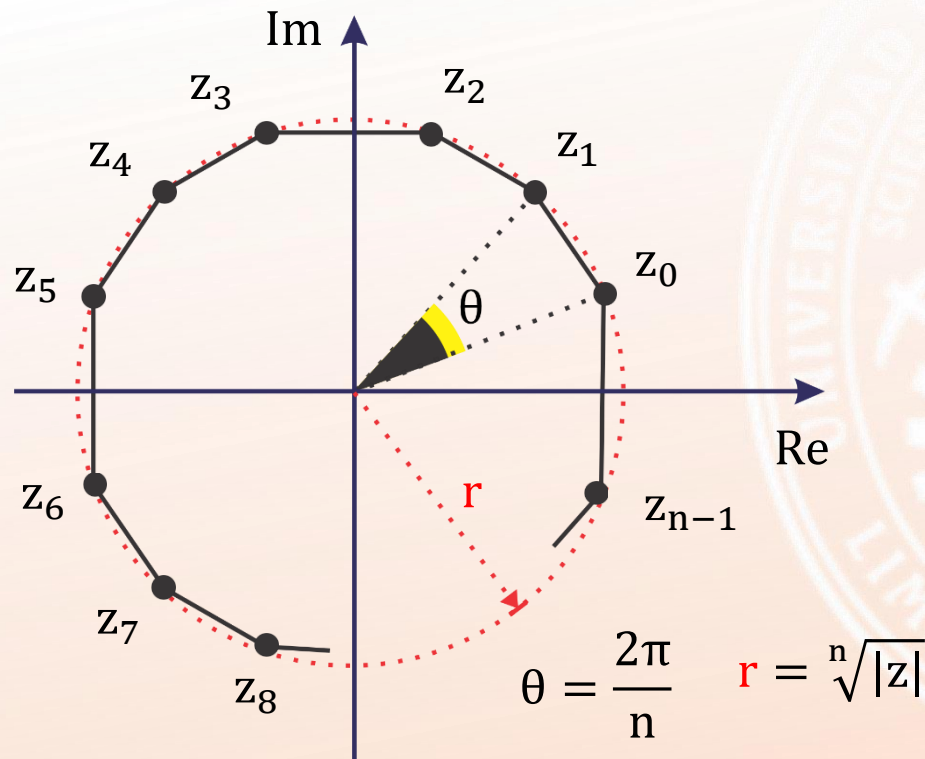
Si $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ son las raíces n -ésimas de z , entonces

$$z_k = z_0 w^k \text{ donde } w = \operatorname{cis} \left(\frac{2\pi}{n} \right)$$

Geométricamente al multiplicar w por z_0 se genera un giro de amplitud $\frac{2\pi}{n}$, las raíces $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ se obtienen girando la raíz n -ésima principal z_0 , con giros sucesivos de amplitud $\frac{2\pi}{n}$

RAÍZ N-ÉSIMA DE UN NÚMERO COMPLEJO

Si $n \geq 3$, al representar todas las raíces n -ésimas del complejo no nulo z se tiene n puntos sobre una circunferencia de centro $(0; 0)$ y radio $\sqrt[n]{|z|}$ que forman un polígono regular de n lados.



$$z_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1} = 0$$

$$z_0^n = z_1^n = z_2^n = \dots = z_{n-1}^n = z$$

Ejemplo

Sea la ecuación $z^{15} = i$ ¿cuántas raíces pertenecen al segundo cuadrante ?

$$\sqrt[15]{i} = \sqrt[15]{|i|} \operatorname{cis} \left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{15} \right) \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, 14$$

$$\begin{aligned} \text{Condición: } \frac{\pi}{2} < \frac{(4k+1)\pi}{30} < \pi & \quad 15 < 4k+1 < 30 \\ & \quad 3,5 \dots < k < 7,25 \dots \\ & \quad k = 4; 5; 6; 7 \end{aligned}$$

El número de raíces que pertenecen al segundo cuadrante es 4

GRÁFICA DE CONJUNTOS

Ejemplo

Determine gráficamente los siguientes conjuntos

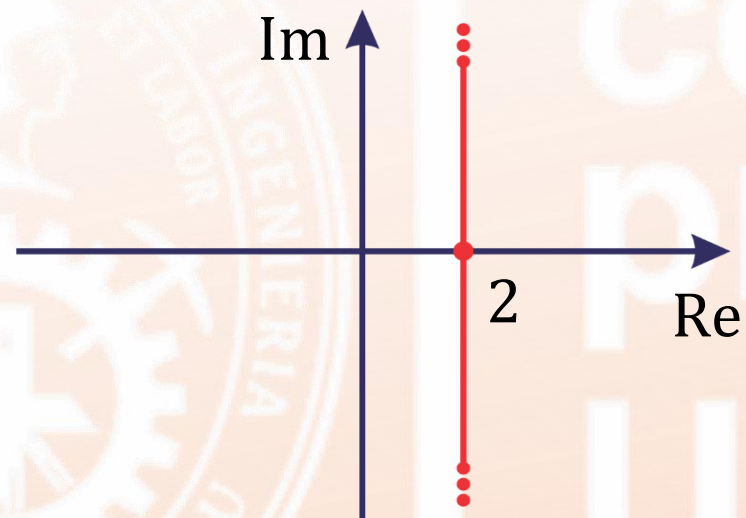
$$(i) A = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) = 2\}$$

$$z = (x; y)$$

$$\operatorname{Re}(z) = x \quad \operatorname{Im}(z) = y$$

$$A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x = 2\}$$

La gráfica es una recta vertical
que interseca al eje real en $x = 2$



GRÁFICA DE CONJUNTOS

Ejemplo

Determine gráficamente los siguientes conjuntos

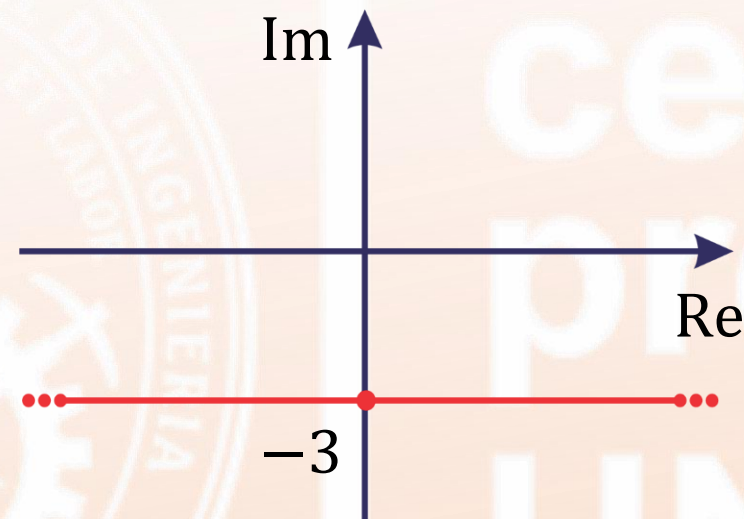
$$(ii) B = \{ z \in \mathbb{C} / \text{Im}(z) = -3 \}$$

$$z = (x; y)$$

$$\text{Re}(z) = x \quad \text{Im}(z) = y$$

$$B = \{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = -3 \}$$

La gráfica es una recta horizontal que interseca al eje imaginario en $y = -3$



GRÁFICA DE CONJUNTOS

Ejemplo

Determine gráficamente los siguientes conjuntos

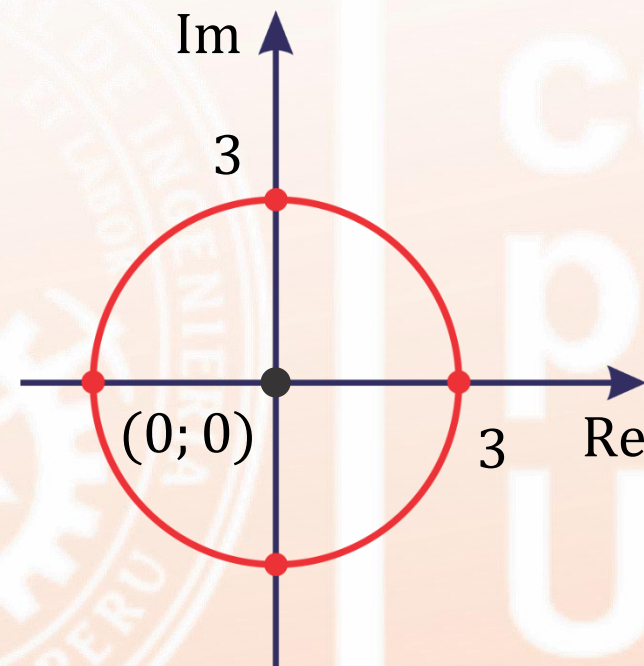
$$(iii) \ C = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 3\}$$

$$z = (x; y)$$

$$C = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \sqrt{x^2 + y^2} = 3\}$$

$$x^2 + y^2 = 3^2$$

La gráfica es una circunferencia centrada en $(0; 0)$ y de radio 3



GRÁFICA DE CONJUNTOS

Ejemplo

Determine gráficamente los siguientes conjuntos

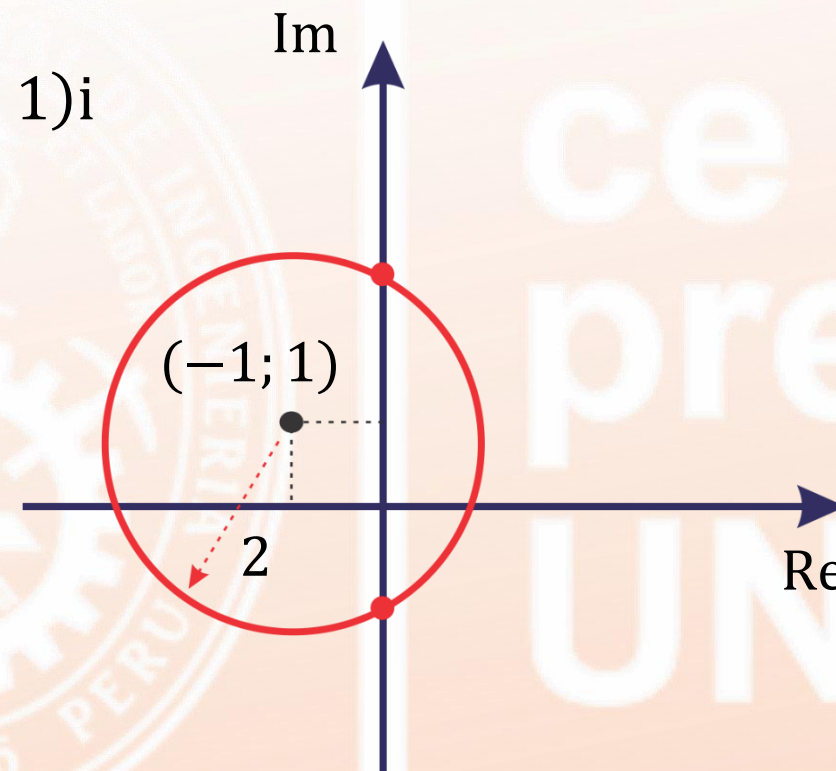
$$(iv) D = \{z \in \mathbb{C} / |z + 1 - i| = 2\}$$

$$z = x + yi, \quad z + 1 - i = (x + 1) + (y - 1)i$$

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2} = 2\}$$

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$$

La gráfica es una circunferencia centrada en $(-1; 1)$ y de radio 2



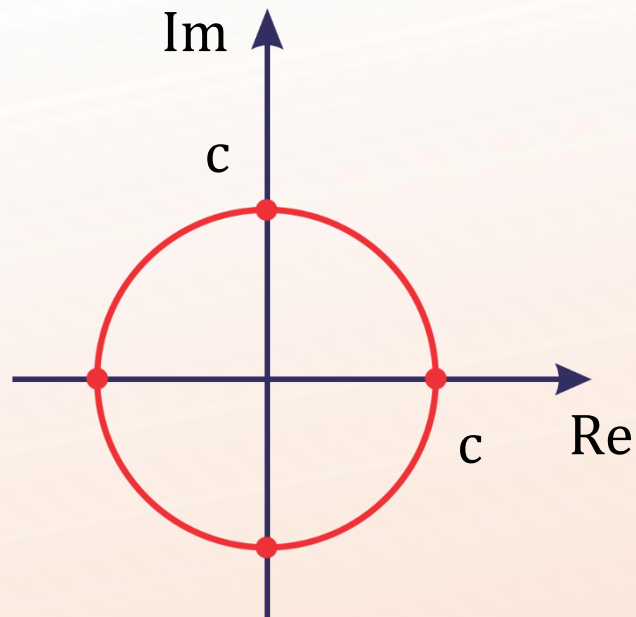
GRÁFICA DE CONJUNTOS

Observación

Sea $z \in \mathbb{C}^*$, $z = |z| \text{ CIS}(\theta)$

$$|z| = c \text{ (constante)}$$

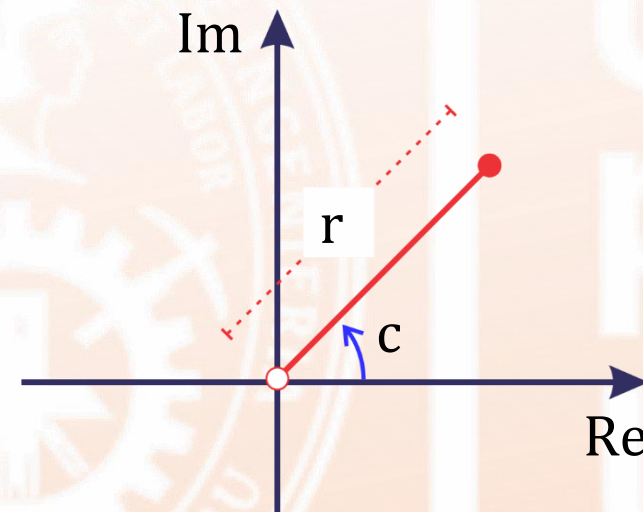
$$0 \leq \theta < 2\pi$$



(circunferencia)

$$\theta = \text{Arg}(z) = c \text{ (constante)}$$

$$0 < |z| \leq r$$



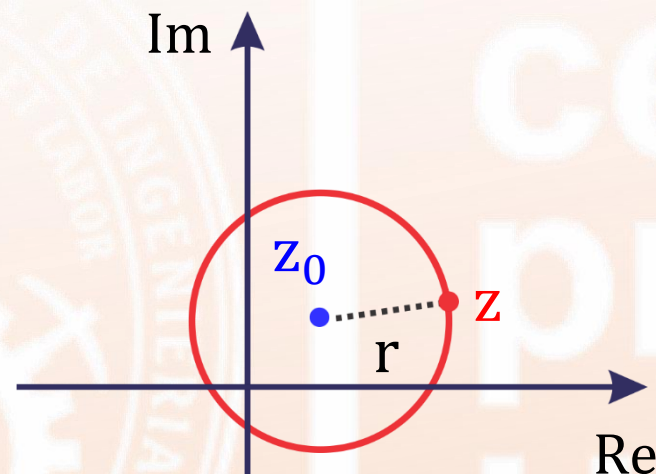
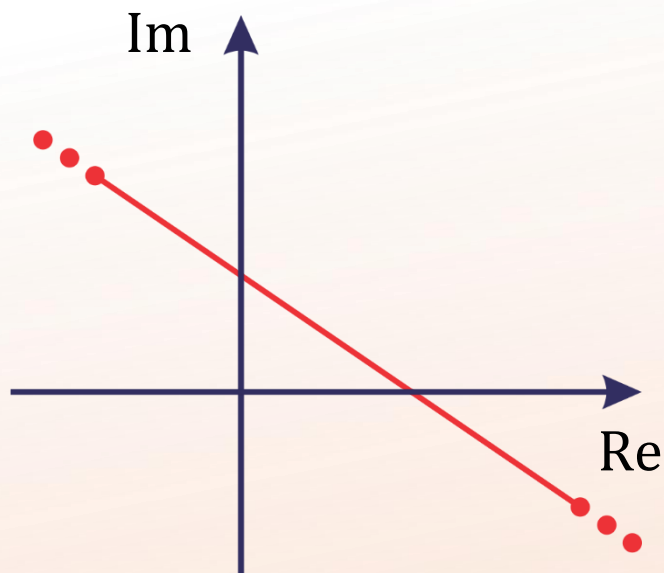
(segmento dirigido)

GRÁFICA DE CONJUNTOS

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ diferentes de cero

$$A = \{ z \in \mathbb{C} / a \operatorname{Re}(z) + b \operatorname{Im}(z) = c \}$$

$$B = \{ z \in \mathbb{C} / |z - z_0| = r \}$$



z_0 es el centro

GRÁFICA DE REGIONES

Ejemplo

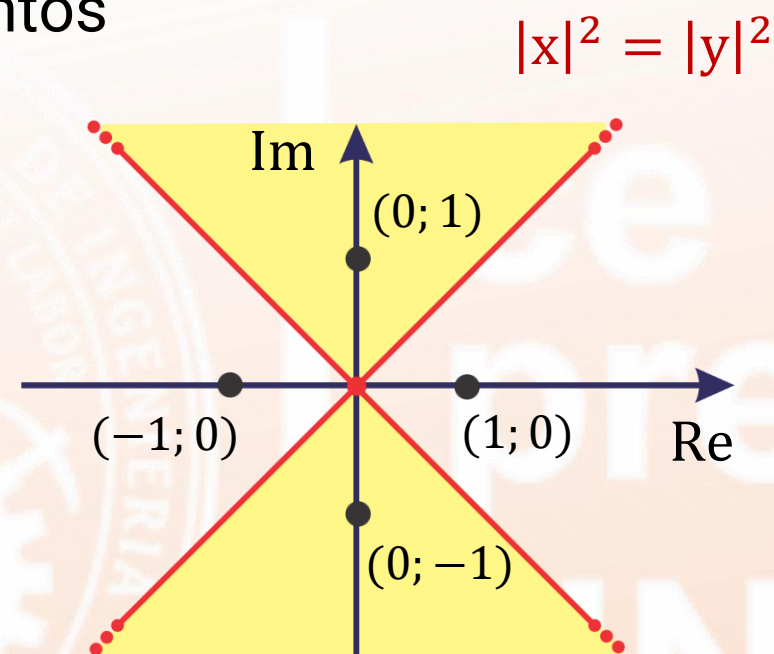
Determine gráficamente los siguientes conjuntos

$$(i) S = \{z \in \mathbb{C} / |\operatorname{Re}(z)|^2 \leq |\operatorname{Im}(z)|^2\}$$

$$z = (x; y) \quad \operatorname{Re}(z) = x, \quad \operatorname{Im}(z) = y$$

$$S = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / |x|^2 \leq |y|^2\}$$

$$|x|^2 = |y|^2 \quad \vee \quad |x|^2 < |y|^2$$



GRÁFICA DE REGIONES

Ejemplo

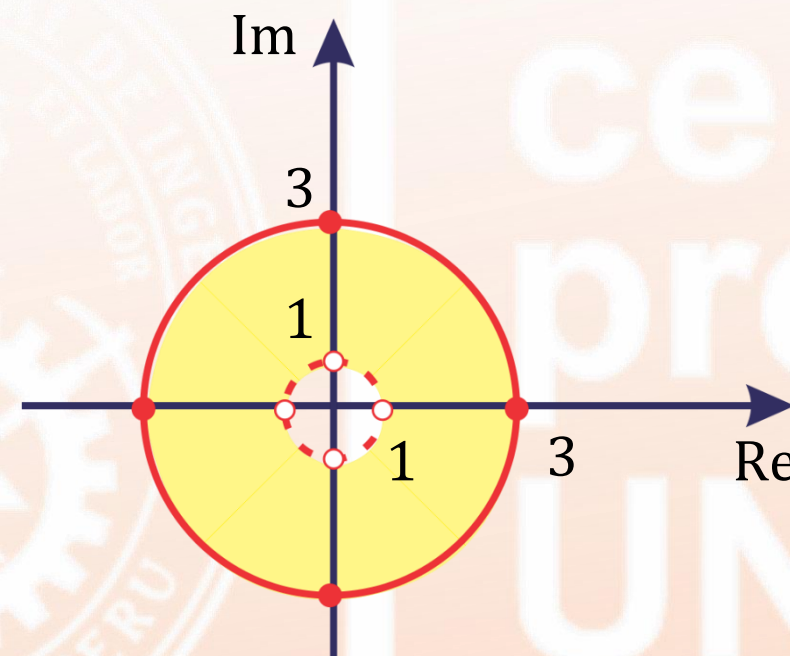
Determine gráficamente los siguientes conjuntos

$$(ii) S = \{z \in \mathbb{C} / 1 < |z| \leq 3\}$$

$$z = (x; y) \quad \text{Re}(z) = x, \quad \text{Im}(z) = y$$

$$S = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / 1 < \sqrt{x^2 + y^2} \leq 3\}$$

$$1^2 < x^2 + y^2 \leq 3^2$$

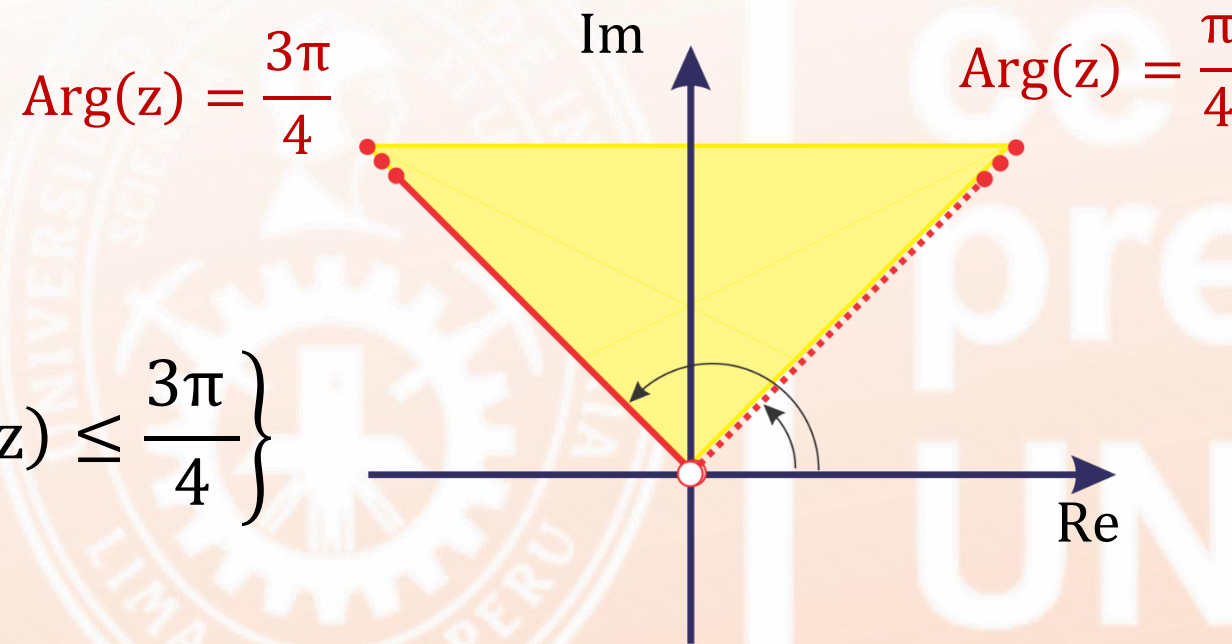


GRÁFICA DE REGIONES

Ejemplo

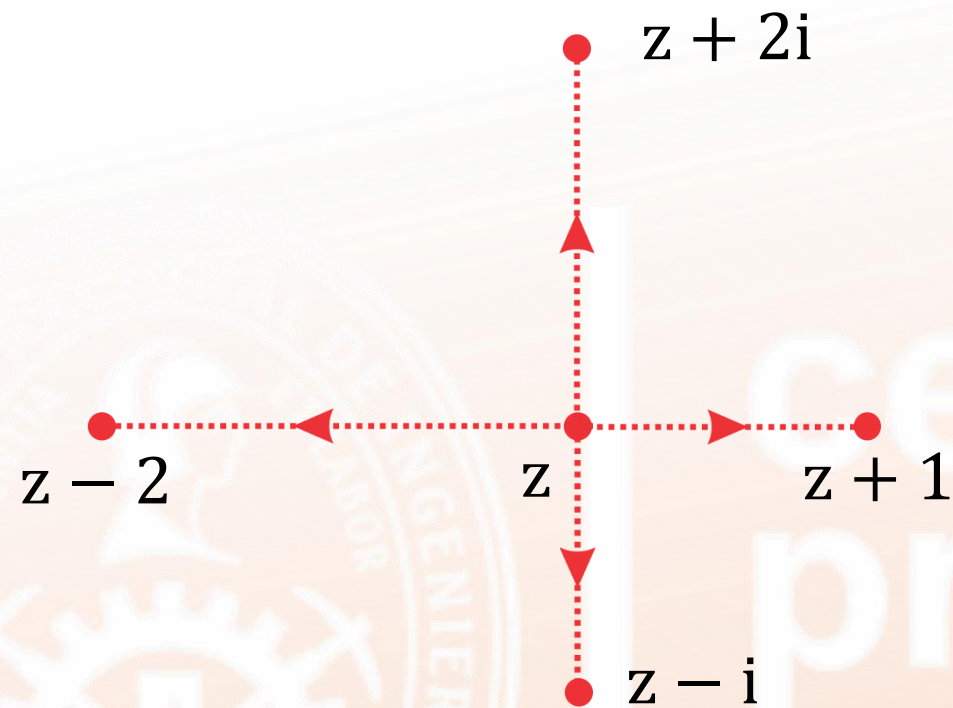
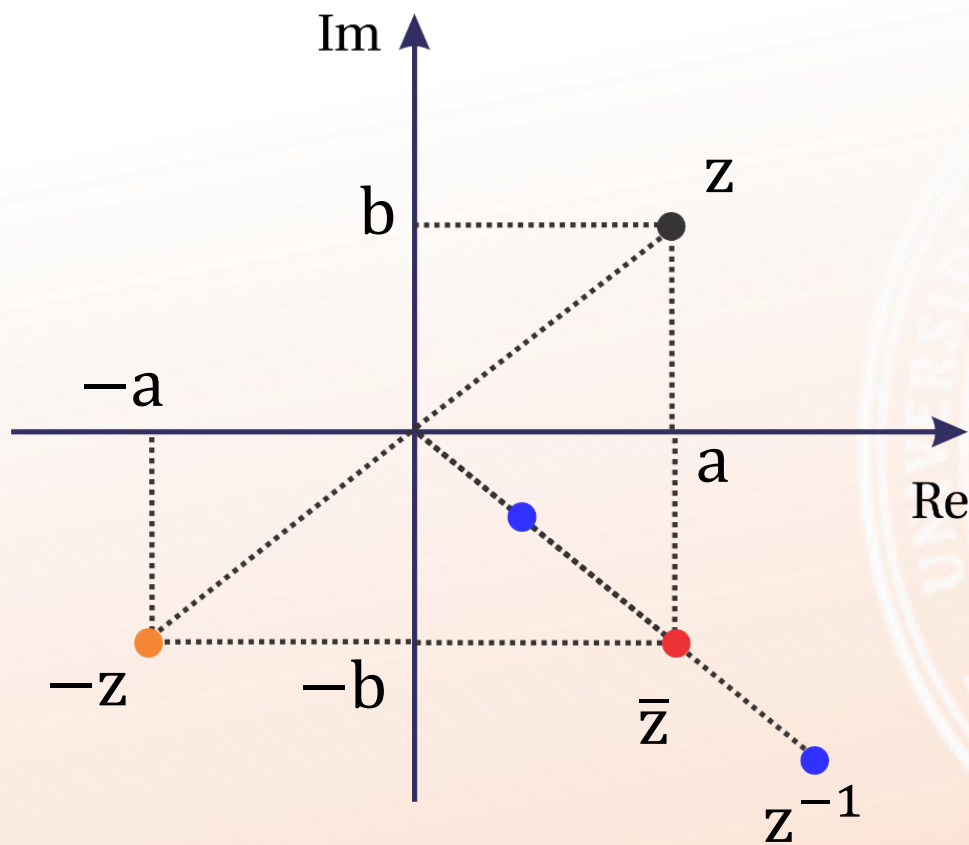
Determine gráficamente los siguientes conjuntos

$$(iii) S = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{\pi}{4} < \text{Arg}(z) \leq \frac{3\pi}{4} \right\}$$



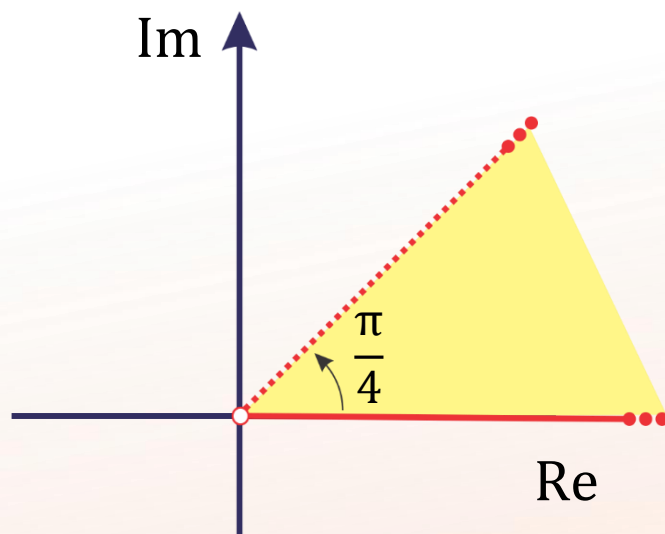
GRÁFICA DE REGIONES

Observación

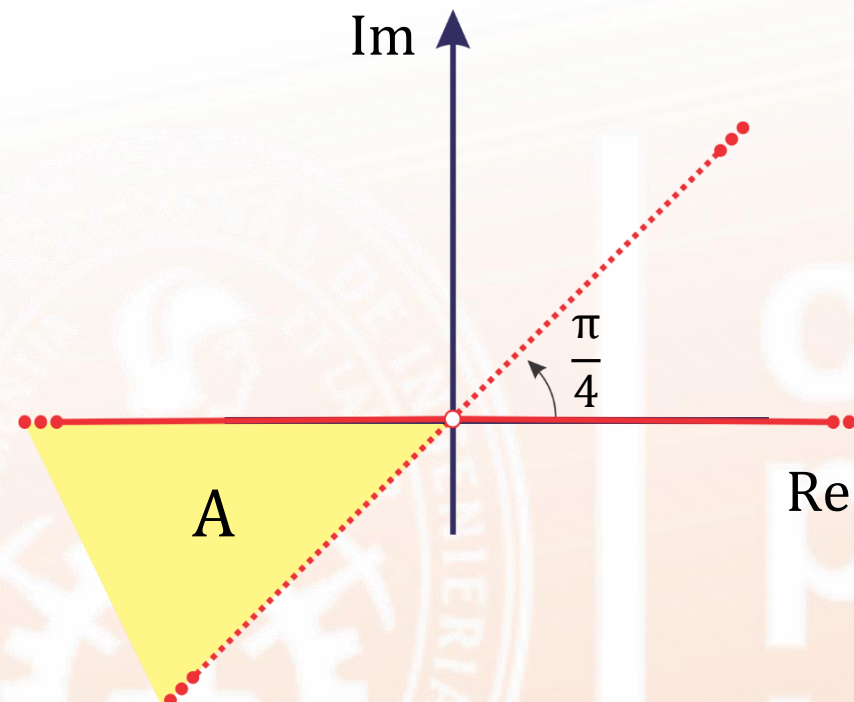


GRÁFICA DE CONJUNTOS

Determine la gráfica de $A = \{ -z \in \mathbb{C} / 0 \leq \text{Arg}(z) < \frac{\pi}{4} \}$



Representación de los valores
de z tal que $0 \leq \text{Arg}(z) < \frac{\pi}{4}$



Representación de los valores de
 $-z$ tal que $0 \leq \text{Arg}(z) < \frac{\pi}{4}$

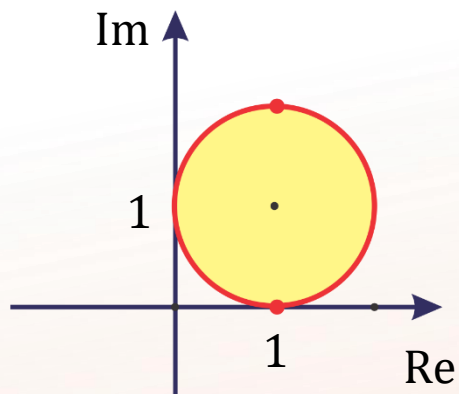
GRÁFICA DE CONJUNTOS

Determine la gráfica de

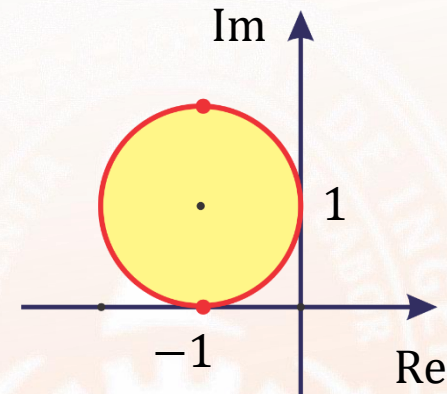
$$B = \{ (1 - \bar{z}) \in \mathbb{C} \mid |iz + 1 - i| \leq 1 \}$$

$$|iz - i^2 - i| \leq 1, \quad |i(z - i - 1)| \leq 1$$

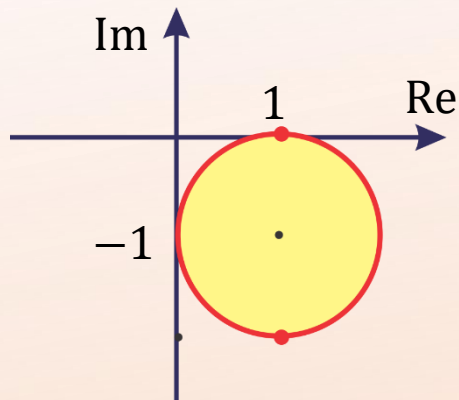
$$|i| |z - i - 1| \leq 1, \quad |z - i - 1| \leq 1$$



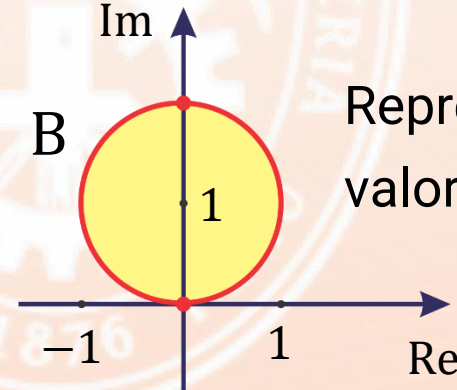
Representación de
los valores de z



Representación de
los valores de $-\bar{z}$



Representación de
los valores de $\bar{z}$



Representación de los
valores de $-\bar{z} + 1$

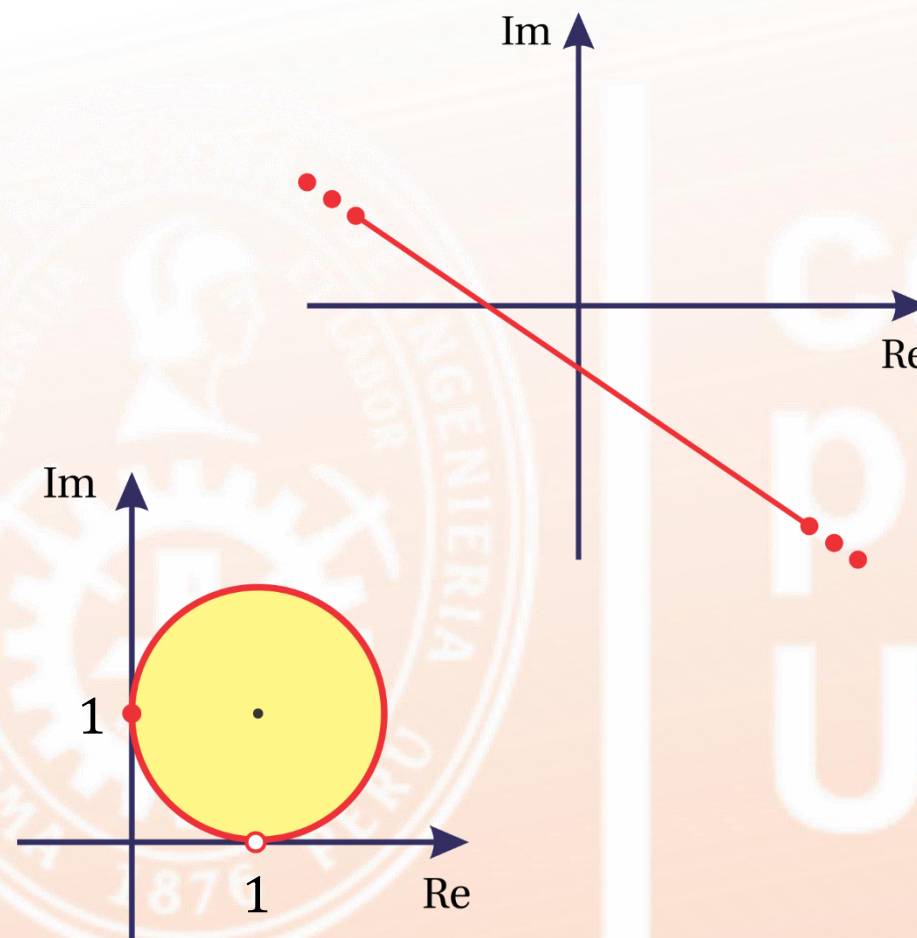
GRÁFICA DE CONJUNTOS

Ejercicio

Determine gráficamente los siguientes conjuntos

$$A = \{ z \in \mathbb{C} / |z + 3i| = |z - 2| \}$$

$$B = \{ z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im} \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \geq 1 \}$$



Ejercicio

Determine gráficamente los siguientes conjuntos

$$(i) A = \{z \in \mathbb{C} / 2i\bar{z} = |z + 2i|\} \quad (ii) B = \{iz + 1, z \in \mathbb{C} / |z - i + 1| \leq 1\}$$

Ejercicio

Sea $A \subset \mathbb{C}$ la región del plano complejo que se muestra en la figura adjunta.

Grafique la región

$$B = \left\{ ze^{\frac{\pi}{2}i} / z \in A \right\}$$

